APRIL/MAY 2024

BMA61 — LINEAR ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks

Shanmuga Industries Arts & Science College
T.V.Malai

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Define subspace.

   உள் வெளி வரையறு.

2. If $S \subseteq T$ then prove that $L(S) \subseteq L(T)$.

   $S \subseteq T$ எனில் $L(S) \subseteq L(T)$.

3. Define dual space.

   இருமவெளி வரையறு.

4. Define orthogonal complement of a subspace.

   உள் வெளியின் செங்குத்து நிரப்பி வரையறு.

5. Define linear transformation.

   ஒரு படி உருமாற்றம் வரையறு.

17. If V and W are two finite dimensional vector spaces over a field F and $\dim V = m$, $\dim W = n$, then prove that $Hom(V,W)$ is a vector space of dimension mn over F.

V மற்றும் W என்பவை F-ன் மீதான முடிவுறு பரிமானமுள்ள வெக்டர்வெளி, $\dim V = m$, $\dim W = n$ எனில் $Hom(V,W)$ என்பது F-ன் மீதான mn பரிமானமுள்ள வெக்டர்வெளி என நிரூபி.

18. If V is finite dimensional over F, then $T \in A(V)$ is regular $\Leftrightarrow$ T maps V onto V.

V என்பது F-ன் மீதான முடிவுறு பரிமானமுள்ள வெக்டர்வெளி எனில் $T \in A(V)$ ஒழுங்கானது $\Leftrightarrow$ T யானது முழுக்கோப்பு.

19. Prove that If $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F, then there is a basis of V in which the matrix of T is triangular.

$T \in A(V)$ அதன் அனைத்து சிறப்பியல்பு மூலங்களையும் F ல் கொண்டிருந்தால் T-ன் அணியை முக்கோணமாகக் கொண்ட V-ன் அடிகணம் இருக்கும் என நிரூபி.

20. Prove that the determinant of a triangular matrix is the product of its entries on the main diagonal.

ஒரு முக்கோண அணியின் அணிக்கோவை அதன் மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கலாகும் என நிரூபி.

(b) Prove that the union of two subspaces is a subspace iff one is contained in the other.

ஒரு வெக்டர் வெளியின் இரு உள் வெளிகளின் சேர்க்கை ஓர் உள்வெளியாக இருக்க தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை அவைகளில் ஒன்று மற்றதன் உள்ளடங்கியதாக இருக்கும் எனக் காட்டுக.

12. (a) If V is finite dimensional and $v \neq 0 \in V$, then there is an element $f \in \hat{V}$ such that $f(v) \neq 0$.

V என்பது முடிவுற்ற பரிமாணமுள்ள வெக்டர் வெளி மற்றும் $v \neq 0 \in V$ எனில் $f(v) \neq 0$ எனுமாறு $f \in \hat{V}$ உருவாகும்.

Or

(b) Prove that $W^{\perp}$ is a subspace of V.

$W^{\perp}$ என்பது V-ன் உள்வெளி என நிரூபி.

13. (a) Let V is finite dimensional over F. If then $T \in A(V)$ is singular if there exists a $v \neq 0$ in V such that $vT = 0$.

V என்பது F-ன் மீதான முடிவுறு பரிமானமுள்ள வெக்டர் வெளி என்க. $T \in A(V)$ வழுவுள்ளது எனில் $vT = 0$ எனுமாறு V ல் ஒரு $v \neq 0$ உருவாகும் என நிரூபி.

Or

(b) If $\lambda \in F$ is a characteristic root of $T \in A(V)$, then for any polynomial $q(x) \in F[x]$ Prove that $q(\lambda)$ is a characteristic root of $q(T)$.

$\lambda \in F$ என்பது $T \in A(V)$-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் எனில் எந்த ஒரு அடுக்குக்கோவை $q(x) \in F[x]$ க்கும் $q(\lambda)$ என்பது $q(T)$-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் என நிரூபி.

14. (a) In $F2$ prove that for any two elements A and B, $(AB-BA)^2$ is a scalar matrix.

$F2$ ல் எந்த இரண்டு உறுப்புகள் A மற்றும் B-க்கு $(AB-BA)^2$ என்பது ஸ்கேலர் அணி என நிரூபி.

Or

(b) Let V is n dimensional over F. If $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F, then prove that T satisfies a polynomial of degree n over F.

V என்பது F-ன் மீதான n பரிமாணமுள்ள வெக்டர்வெளி என்க. $T \in A(V)$ அதன் அனைத்து சிறப்பியல்பு மூலங்களையும் F ல் கொண்டிருந்தால் T யானது n படி கொண்ட அடுக்குக்கோவையை F-ன் மீது பூர்த்தி செய்யும் என நிரூபி.

15. (a) If $A, B \in F_n$ and $\lambda \in F$ then prove that $tr(AB) = tr(BA)$.

$A, B \in F_n$ மற்றும் $\lambda \in F$ எனில் $tr(AB) = tr(BA)$ என நிரூபி.

Or

(b) If two rows of A are equal, then prove that $\det A = 0$.

A-ன் இரண்டு நிரல்கள் சமம் எனில் $\det A = 0$ என நிரூபி.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. If V is a finite dimensional vector space over a field F, A and B are subspaces of V then prove that $\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$.

V என்பது F-ன் மீதான முடிவுறு பரிமாணமுள்ள வெக்டர்வெளி, A மற்றும் B என்பவை V-ன் உள்வெளிகள் எனில்

$\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$ என நிரூபி.